制限のある提携形ゲームにおける凸性等の性質 (非線形解析学と凸解析学の研究)

谷野, 哲三

数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 118-126

制限のある提携形ゲームにおける凸性等の性質

大阪大学大学院工学研究科　谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1　はじめに

近年，提携に制限のある協力ゲーム（提携形ゲーム）の研究が盛んになっている．提携への制限は実現可能提携システムあるいは許容提携構造といった形で取り扱われ，元のゲームにそれを反映した新たなゲーム（制限ゲーム）を考えることにより，制限のある状況での利得分配を定めることが可能になる．本稿では，元のゲームがもつ諸性質が制限ゲームに継承されるかどうかについて，考察する．

2　提携形ゲームとその性質

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ を n 人のプレイヤーの集合，$v:2^N\to\mathbf{R}$ を $v(\emptyset)=0$ を満足する実数値関数（特性関数）とする．$v(S)$ は提携 S が獲得可能な利益（利益ゲーム）と解釈されるが，これを提携 S が負担すべきコスト（コストゲーム）とみなすこともある．譲渡可能効用を持つ提携形ゲームは対 (N,v) で表されるが，N が自明な場合には v そのものをゲームと呼ぶこともある．なお，以下では，$v(\{i\})=v(i)$，$S\cup\{i\}=S\cup i$，$S\setminus\{i\}=S\setminus i$ などの略記を用いる．

定義 1 ゲーム (N,v) は，

$$v(S)\le v(T),\ \ \forall S,T\subseteq N,\ S\subseteq T$$

を満足するとき，単調であるといわれる．

定義 2 ゲーム (N,v) は，

$$v(S)+v(T)\le v(S\cup T),\ \ \forall S,T\subseteq N,\ S\cap T=\emptyset$$

を満足するとき，優加法的であるといわれる．

定義 3 ゲーム (N,v) が優加法性より強い条件である

$$v(S)+v(T)\le v(S\cup T)+v(S\cap T),\ \ \forall S,T\subseteq N$$

を満足するとき，このゲームは凸であるといわれる．集合関数としてみると，v が優モジュラーであるときゲーム (N,v) は凸である *[5]*.

定義 4 ゲーム (N,v) の上ベクトル $M(v)\in\mathbf{R}^n$ とギャップ関数 $g^v:2^N\to\mathbf{R}$ は

$$\begin{aligned} M_i(v) &:= v(N)-v(N\setminus i), &&\forall i\in N,\\ g^v(S) &:= \sum_{i\in S}M_i(v)-v(S), &&\forall S\subseteq N\end{aligned}$$

で定義される．

命題 1 次の *(i),(ii)* はいずれも，ゲーム (N,v) が凸になるための必要十分条件である：

$$\begin{array}{ll} (i) & v(S\cup i)-v(S)\le v(T\cup i)-v(T),\ \ \forall i\in N,\ \forall S,T\subseteq N:\ S\subseteq T\subseteq N\setminus i, \\ (ii) & g^v(S\cup i)-g^v(S)\ge g^v(T\cup i)-g^v(T),\ \forall i\in N,\ \forall S,T\subseteq N:\ S\subseteq T\subseteq N\setminus i. \end{array}$$

凸ゲームの有用性は，提携形ゲームに対し提案されているコア，Shapley 値，仁などさまざまな解の間に密接な関連が成り立つことにある [3]．またゲームの凸性は，その（定義域）の拡張を考えると通常の関数の凸性（凹性）と結びついている．

命題 2 *[2]* ゲーム (N,v) が凸になるための必要十分条件は，その Lovász 拡張が凹関数になることである．

凸ゲームの拡張概念として，ギャップ関数を用いて定義される半凸と 1-凸の概念がある．

定義 5 ゲーム (N,v) は

$$0\le g^v(i)\le g^v(S),\quad \forall i\in N,\ \forall S\subseteq N: i\in S$$

を満足するなら，半凸であるといわれる．また次の条件を満足するなら *1-*凸であるといわれる：

$$0\le g^v(N)\le g^v(S)\ \ \forall S\subset N,\ \ S\ne\emptyset.$$

ゲームが半凸や 1-凸であれば，τ-値の計算が容易になったり，コアの端点が具体的に与えられたりすることが知られている．

ゲームの凸性についてはこれら以外にも，Izawa and Takahashi により Shapley 値がコアに含まれるための必要十分条件としての全凸性の概念が提案されている [6]．

3 実現可能提携システムと制限ゲーム

この章では，提携に対する制限を表す実現可能提携システムの概念と，それに基づく制限ゲームについてまとめる．

定義 6 実現可能提携システム *(*以下では FCS と略する*)* は，次の性質を満たす対 $(N,\mathcal{F})$, $\mathcal{F}\subseteq 2^N$, である：

$$\emptyset\in\mathcal{F},\ \ \{i\}\in\mathcal{F}\ \ \forall i\in N.$$

$S\subset N$ のすべての分割の集合を $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ で表す．すなわち，

$$\{S_j\}_{j\in J}\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\iff S_j\ne\emptyset,\ \bigcup_{j\in J}S_j=N,\ S_j\cap S_k=\emptyset\ (i\ne j)$$

である．$\{i\}\in\mathcal{F}\ \ \forall i\in N$ であるから，$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\ne\emptyset$．

定義 7 ゲーム (N,v) の FCS $(N,\mathcal{F})$ による制限ゲーム $(N,v^{\mathcal{F}})$ は，

$$v^{\mathcal{F}}(S)=\max\{\sum_{j\in J}v(S_j)|\{S_j\}_{j\in J}\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\}.$$

で定義される．

制限ゲームの単調性については次の結果が得られる.

定理 1 ゲーム (N,v) において，すべての $i\in N$ に対し $v(i)\geq 0$ であれば，その FCS $(N,\mathcal{F})$ による制限ゲーム $(N,v^{\mathcal{F}})$ は単調である.

次に制限ゲームは定義から自動的に優加法的となることが容易に示せる.

定理 2 ゲーム (N,v) の FCS $(N,\mathcal{F})$ による制限ゲーム $(N,v^{\mathcal{F}})$ は優加法的である.

凸性については，かなり条件を必要とする．まず，制限ゲームがより簡明な表現をもつために，FCS に要求される条件について述べる．FCS $(N,\mathcal{F})$ が与えられたときに，$S\subseteq N$ の $\mathcal{F}$ 成分とは，$\mathcal{F}$ に属する S の極大部分集合のことである．S の $\mathcal{F}$ 成分全体の集合を $\Pi_{\mathcal{F}}(S)$ で表す.

命題 3 *[2]* $(N,\mathcal{F})$ をFCS，(N,v) を優加法的なゲームとする．もし $\Pi_{\mathcal{F}}(S)$ が S の分割であれば，

$$v^{\mathcal{F}}(S)=\sum_{T\in\Pi_{\mathcal{F}}(S)}v(T)$$

が成り立つ.

このことに着目して考えられたFCSのクラスが，分割システムである.

定義 8 分割システム（以下ではPSと略記）は，すべての $S\subseteq N$ に対し $\mathcal{F}$ 成分の族が S の分割となる，すなわち $\Pi_{\mathcal{F}}(S)\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ が成り立つ FCS である.

系 1 $(N,\mathcal{F})$ が PS で (N,v) が優加法的なゲームであれば，任意の $S\subseteq N$ に対し，

$$v^{\mathcal{F}}(S)=\sum_{T\in\Pi_{\mathcal{F}}(S)}v(T)$$

が成り立つ.

実は分割システムは，別の条件で特徴付けられることが知られている.

命題 4 FCS $(N,\mathcal{F})$ が PS になるための必要十分条件は，

$$S\in\mathcal{F},T\in\mathcal{F},S\cap T\neq\emptyset\Rightarrow S\cup T\in\mathcal{F}$$

が成り立つことである.

つまり，PSは共通部分をもつ２つの実現可能提携の和集合も実現可能となるFCSである．PSにさらに共通部分についても実現可能となることを要求したFCSのクラスが交差システムと呼ばれるものである.

定義 9 FCS $(N,\mathcal{F})$ は

$$S,T\in\mathcal{F},S\cap T\neq\emptyset\Rightarrow S\cap T\in\mathcal{F},S\cup T\in\mathcal{F}$$

を満足するとき，交差システム（以下ISと略記）といわれる.

定理 3 *[1]* $(N,\mathcal{F})$ が IS で，ゲーム (N,v) が凸であれば，制限ゲーム $(N,v^{\mathcal{F}})$ も凸になる．

（証明 1）Algaba et al. [1] では，Faigle の補題 [4] を用いて証明が可能とされているが，本質的には同じ内容を帰納法を用いた表現で証明しておく．$S,T \subseteq N$ とし

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T) \geq v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T)$$

を示す．

$$\Pi_{\mathcal{F}}(S) = \{S_1, S_2, \ldots, S_l\},\ \Pi_{\mathcal{F}}(T) = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$$

とし，l,m に関する帰納法を用いる．
(i) $m=1$ の場合：$\Pi_{\mathcal{F}}(T) = \{T\}$.
(i-1) $l=1$ のとき，$\Pi_{\mathcal{F}}(S) = \{S\}$.
(a) $S \cap T = \emptyset$ のときは，$\{S,T\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S \cup T)$ であるから，

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T) \geq v(S) + v(T) = v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T).$$

(b) $S \cap T \neq \emptyset$ のときは，$(N,\mathcal{F})$ が IS であることより，$S \cup T, S \cap T \in \mathcal{F}$ であるから，

$$\Pi_{\mathcal{F}}(S \cup T) = \{S \cup T\},\ \Pi_{\mathcal{F}}(S \cap T) = \{S \cap T\}$$

より，(N,v) の凸性に注意すると

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T) &= v(S \cup T) + v(S \cap T) \\ &\geq v(S) + v(T) \\ &= v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T). \end{aligned}$$

(i-2) $l \leq k-1$ のとき成り立つとし，$l=k$ のときを示す．$\Pi_{\mathcal{F}}(S) = \{S_1, \ldots, S_k\}$ とする．
(a) $S \cap T = \emptyset$ のときは，$\{S_1, \ldots, S_k, T\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S \cup T)$ であるから，

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T) \geq \sum_{j=1}^{k} v(S_j) + v(T) = v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T).$$

(b) $S \cap T \neq \emptyset$ のときは，$S_k \cap T \neq \emptyset$ として，一般性を失わない．$S' = \bigcup_{j=1}^{k-1} S_j$ とすると

$\Pi_{\mathcal{F}}(S') = \{S_1, \ldots, S_{k-1}\}$, $\Pi_{\mathcal{F}}(S_k \cup T) = \{S_k \cup T\}$, $S \cup T = S' \cup (S_k \cup T)$, $S' \cap (S_k \cup T) = S' \cap T$

および，$S_1 \cap T, \ldots, S_{k-1} \cap T$ のうち空でないものはすべて $\mathcal{F}$ の要素であり，かつ $\bigcup_{j=1}^{k-1}(S_j \cap T) = (\bigcup_{j=1}^{k} S_j) \cap T = S' \cap T$ より，$|\Pi_{\mathcal{F}}(S' \cap T)| \leq k-1$ であることに注意すると，帰納法の仮定とゲームの凸性から

$$\begin{aligned} &v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S' \cap T) \geq v^{\mathcal{F}}(S') + v^{\mathcal{F}}(S_k \cup T) = \sum_{j=1}^{k-1} v(S_j) + v^{\mathcal{F}}(S_k \cup T), \\ &v^{\mathcal{F}}(S \cap T) = v^{\mathcal{F}}((S' \cap T) \cup (S_k \cap T)) \geq v^{\mathcal{F}}(S' \cap T) + v^{\mathcal{F}}(S_k \cap T), \\ &v^{\mathcal{F}}(S_k \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S_k \cap T) = v(S_k \cup T) + v(S_k \cap T) \geq v(S_k) + v(T). \end{aligned}$$

上の 3 式を加えることにより

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T) \geq \sum_{j=1}^{k} v(S_j) + v(T) = v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T).$$

よって $m = 1, l = k$ の場合が示されたので，$m = 1$ の場合にはすべての l について成り立つことが示された．

(ii) $m < k$ の場合にすべての l に対して成立すると仮定して，$m = k$ の場合を示す．

(a) $S \cap T = \emptyset$ のときは，$\Pi_{\mathcal{F}}(S) \cup \Pi_{\mathcal{F}}(T) \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S \cup T)$ であることに注意すると

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T) \geq \sum_{R \in \Pi_{\mathcal{F}}(S)} v(R) + \sum_{R \in \Pi_{\mathcal{F}}(T)} v(R) = v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T).$$

(b) $S \cap T \neq \emptyset$ のときは，$S \cap T_k \neq \emptyset$ と仮定して一般性を失わない．$T' = \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i$ とすると，

$$\Pi_{\mathcal{F}}(T') = \{T_1, \ldots, T_{k-1}\},\ S \cup T = (S \cup T_k) \cup T',\ (S \cup T_k) \cap T' = S \cap T'$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T') \geq v^{\mathcal{F}}(S \cup T_k) + v^{\mathcal{F}}(T'),\\
&v^{\mathcal{F}}(S \cap T) = v^{\mathcal{F}}((S \cap T') \cup (S \cap T_k)) \geq v^{\mathcal{F}}(S \cap T') + v^{\mathcal{F}}(S \cap T_k),\\
&v^{\mathcal{F}}(S \cup T_k) + v^{\mathcal{F}}(S \cap T_k) \geq v^{\mathcal{F}}((S) + v^{\mathcal{F}}(T_k).
\end{aligned}$$

これら 3 式を足し合わせると

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup T) + v^{\mathcal{F}}((S \cap T) \geq v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T') + v^{\mathcal{F}}(T_k) = v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T)$$

となり，$m = k$ で l が任意の場合が示された．□

さらに本稿では，ゲームの凸性の同値表現：

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T),\ \ \forall i \in N,\ \forall S, T \subseteq N:\ S \subseteq T \subseteq N \setminus i$$

を用いた別の証明を与える．

補題 1 $S \subseteq T \subseteq N$ で $\Pi_{\mathcal{F}}(S) = \{S_1, S_2, \ldots, S_l\}$ とすると，各 $S_j,\ j = 1, \ldots, l$ に対し $T_j \in \Pi_{\mathcal{F}}(T)$ で $S_j \subseteq T_j$ となるものが存在する．さらに，FCS $(N, \mathcal{F})$ が条件

$$S, T \in \mathcal{F}, S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow S \cap T \in \mathcal{F}$$

を満足し，かつ，ある $R \subseteq N, R \neq \emptyset, R \cap T = \emptyset$ で，$S \cup R \in \mathcal{F}$ となるものが存在するならば，相異なる S_j に対する T_j も相異なるものとなる．

（証明）各 $S_j \in \Pi_{\mathcal{F}}(S)$ に対し，$S_j \subseteq T_j$ となる $T_j \in \Pi_{\mathcal{F}}(T)$ が存在することは $S \subseteq T$ より明らかである．後半の仮定が成り立つときに，もし相異なる S_j, S_k に対し $S_j, S_k \subset T_j$ となったとすると，

$$T_j \cap (S \cup R) \supseteq S_j \cup S_k \neq \emptyset$$

より，$T_j \cap (S \cup R) \in \mathcal{F}$ かつ $S_j \subset T_j \cap (S \cup R) \subseteq S$ となるが，これは $S_j \in \Pi_{\mathcal{F}}(S)$ であることに矛盾する．よって，相異なる S_j, S_k には相異なる T_j, T_k が対応する．□

補題 2 (N,v) を凸なゲームとする．$S \subseteq T \subseteq N$ で，S の分割 $\{S_1, S_2, \ldots, S_l\}$ と T の分割 $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ に対し，$S_j \subseteq T_j$，$j = 1, 2, \ldots, l$ が成り立つとき，

$$v(S) - \sum_{j=1}^{l} v(S_j) \leq v(T) - \sum_{j=1}^{m} v(T_j)$$

である．

(証明) 仮定を満たす S の分割 $\{S_1, S_2, \ldots, S_l\}$ と T の分割 $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ に対し，ゲーム (N,v) の凸性が成り立つ（したがって優加法も成り立つ）ことに着目すると

$$\begin{aligned}
v(T) + \sum_{j=1}^{l} v(S_j) &= v(\bigcup_{j=1}^{m-1} T_j \cup T_m) + \sum_{j=1}^{l} v(S_j) \\
&\geq v(\bigcup_{j=1}^{m-1} T_j) + v(T_m) + \sum_{j=1}^{l} v(S_j) \\
&\geq \cdots \\
&\geq v(\bigcup_{j=1}^{l} T_j) + \sum_{j=l+1}^{m} v(T_j) + \sum_{j=1}^{l} v(S_j) \\
&= v(\bigcup_{j=1}^{l-1} T_j \cup S \cup T_j) + \sum_{j=l+1}^{m} v(T_j) + \sum_{j=1}^{l-1} v(S_j) + v(S_l) \\
&\geq v(\bigcup_{j=1}^{l-1} T_j \cup S) + \sum_{j=l}^{m} v(T_j) + \sum_{j=1}^{l-1} v(S_j) \\
&\geq \cdots \\
&\geq v(T_1 \cup S) + \sum_{j=2}^{m} v(T_j) + v(S_1) \\
&\geq v(S) + \sum_{j=l}^{m} v(T_j)
\end{aligned}$$

となり，結論が示された．□

(定理 5 の証明 2) $i \in N$, $S \subseteq T \subseteq N \setminus i$ とし，

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup i) - v^{\mathcal{F}}(S) \leq v^{\mathcal{F}}(T \cup i) - v^{\mathcal{F}}(T)$$

となることを示す．

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\mathcal{F}}(S \cup i) = \{S_1, \ldots, S_l\},\ i \in S_l \\
&\Pi_{\mathcal{F}}(T \cup i) = \{T_1, \ldots, T_m\},\ i \in T_m
\end{aligned}$$

と仮定して一般性を失わない．このとき，$S_l \subseteq T_m$，したがって $S_l \setminus i \subseteq T_m \setminus i$ である．したがって $(N, \mathcal{F})$ が IS であることに注意すると上の補題 1 より

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\mathcal{F}}(S) = \{S_1, \ldots, S_{l-1}, S'_1, \ldots S'_p\}, \\
&\Pi_{\mathcal{F}}(T) = \{T_1, \ldots, T_{m-1}, T'_1, \ldots T'_p, \ldots, T'_q\},
\end{aligned}$$

でかつ

$$\begin{aligned}&\Pi_{\mathcal{F}}(S_l \setminus i) = \{S'_1, \dots S'_p\},\\ &\Pi_{\mathcal{F}}(T_m \setminus i) = \{T'_1, \dots T'_p, \dots, T'_q\},\\ &S'_h \subseteq T'_h,\ h = 1, 2, , \dots, p\end{aligned}$$

となる．もちろん $p \leq q$ である．このとき

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{F}}(S \cup i) - v^{\mathcal{F}}(S) &= \sum_{j=1}^{l} v(S_j) - \sum_{j=1}^{l-1} v(S_j) - \sum_{h=1}^{p} v(S'_h) \\ &= v(S_l) - \sum_{h=1}^{p} v(S'_h) \end{aligned}$$

となる．同様に

$$v^{\mathcal{F}}(T \cup i) - v^{\mathcal{F}}(T) = v(T_m) - \sum_{h=1}^{q} v(T'_h)$$

である．よって補題2から,

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup i) - v^{\mathcal{F}}(S) \leq v^{\mathcal{F}}(T \cup i) - v^{\mathcal{F}}(T)$$

は明らかである．□

次に，制限ゲームの半凸性と 1-凸性については以下の結果が成り立つ（証明略）．

定理 4 ゲーム (N, v) が優加法的，半凸で，FCS$(N, \mathcal{F})$ が

$$N \in \mathcal{F},\ \ N \setminus i \in \mathcal{F},\ \forall i \in N$$

を満足するとき，制限ゲーム $(N, v^{\mathcal{F}})$ も半凸である．

定理 5 ゲーム (N, v) が優加法的，*1*-凸で，FCS$(N, \mathcal{F})$ が

$$N \in \mathcal{F},\ \ N \setminus i \in \mathcal{F},\ \forall i \in N$$

を満足するとき，制限ゲーム $(N, v^{\mathcal{F}})$ も 1-凸である．

4 実現の程度を考慮した制限ゲーム

この章では，提携の実現可能性を yes, no だけでなくその程度で考慮した程度付き実現可能提携システムの概念とそれに基づく制限ゲームについて考察する．N のベキ集合 2^N は $\{0,1\}^n$ と同一視できるから，FCS $(N, \mathcal{F})$ に対応して

$$f(S) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad S \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{if} \quad S \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

で定義される関数 $f : 2^n \to \{0,1\}$ を考えることができる．この値域 $\{0,1\}$ を区間 $[0,1]$ に拡張することにより提携 S の実現可能性の程度を扱うことができる．

定義 10 グレード付き実現可能システム（以下 GFCS と略記する）は，プレイヤー集合 N と以下の条件を満足する関数 $f: 2^N \to [0,1]$ の対 (N,f) である．

$$f(\emptyset)=1, f(\{i\})=1 \ \ \forall i \in N.$$

GFCS のもとでの制限ゲームを考えるにはレベル集合を介する方法と直接的に定義を与える方法がある．前者については，松井らによる考察 [7] があるので，ここでは後者について論じる．

定義 11 (N,f) を GFCS，(N,v) をゲームとする．(N,v) の (N,f) による制限ゲームの特性関数として，次の２つのものを考える：

$$\begin{aligned}\tilde{v}^f(S) &= \max\{g(\{S_j\}_{j\in J})\sum_{j\in J} v(S_j) | \{S_j\}_{j\in J} \in \mathcal{P}(S)\},\\ \acute{v}^f(S) &= \max\{\sum_{j\in J} f(S_j)v(S_j) | \{S_j\}_{j\in J} \in \mathcal{P}(S)\}.\end{aligned}$$

ここで，$\mathcal{P}(S)$ は提携 S のすべての分割の集合であり，$g(\{S_j\}_{j\in J})$ は分割 $\{S_j\}_{j\in J}$ の実現可能性の程度を表す．

具体的な g の形としては

$$g(\{S_j\}_{j\in J}) = \min_{j\in J} f(S_j)$$

が考えられる．以下では g は上式で定められるものとする．また，後者の定義は，もとのゲームの提携 S の値 $v(S)$ を $f(S)v(S)$ で置き換えたものになっている．

２つの GFCS，f と f^* の間の距離を

$$||f-f^*|| = \max_{S\subseteq N} |f(S)-f^*(S)|$$

で与えれば，S を与えたときの $\tilde{v}^f, \acute{v}^f$ は共に f に関して連続となる．

命題 5 (N,f) を GFCS，(N,v) をゲームとする．このとき制限ゲームの特性関数 $\tilde{v}^f$ および $\acute{v}^f$ は共に f に関して連続である．

制限ゲームの単調性は前と同様に議論される．

定理 6 ゲーム (N,v) において，すべての $i\in N$ に対し $v(i)\geq 0$ であれば，その GFCS (N,f) による制限ゲーム $(N,\tilde{v}^f),(N,\acute{v}^f)$ は共に単調である．

次に，制限ゲームの優加法性について議論する．まず，$(N,\acute{v}^f)$ は v が優加法的であるか否かに関わらず，優加法的になる．

定理 7 ゲーム (N,v) の GFCS (N,f) による制限ゲーム $(N,\acute{v}^f)$ は優加法的である．

$(N,\tilde{v}^f)$ の優加法性は一般に成り立たず，条件を必要とする．ゲーム (N,v) と GFCS (N,f) が与えられたときに，新たなゲーム (N,fv) を

$$(fv)(S) = f(S)v(S), \ \forall S \subseteq N$$

で定義する．

補題 3 (N,f) をGFCS，(N,v) をゲームとする．もしゲーム (N,fv) が優加法的であれば，任意の $S\subseteq N$ に対し

$$\tilde{v}^f(S)=\acute{v}^f(S)=f(S)v(S)$$

が成り立つ．

定理 8 (N,f) をGFCS，(N,v) をゲームとする．もしゲーム (N,fv) が優加法的であれば，制限ゲーム $(N,\tilde{v}^f)$ は優加法的である．

定理 9 (N,f) をGFCS，(N,v) をゲームとする．もしゲーム (N,fv) が凸であれば，制限ゲーム $(N,\tilde{v}^f)$，$(N,\acute{v}^f)$ は共に凸である．

定理 10 ゲーム (N,v) が優加法的，半凸で，GFCS(N,f) が

$$f(N)=1,\ \ f(N\setminus i)=1,\ \forall i\in N$$

を満足するとき，制限ゲーム $(N,\tilde{v}^f)$，$(N,\acute{v}^f)$ は共に半凸である．

定理 11 ゲーム (N,v) が優加法的，*1*-凸で，GFCS $(N,\mathcal{F})$ が

$$f(N)=1,\ \ f(N\setminus i)=1,\ \forall i\in N$$

を満足するとき，制限ゲーム $(N,\tilde{v}^f)$，$(N,\acute{v}^f)$ は共に 1-凸である．

なお、本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究（C）課題番号 16510114 による援助を受けている．

参考文献

[1] E. Algaba, J. M. Bilbao, J. J. Lopez: A unified approach to restricted games, *Theory and Decision* 50 (2001) 333-345.

[2] Bilbao, J.M.: *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers (2000).

[3] Driessen, T.: *Cooperative Games, Solutions and Applications*, Kluwer Academic Publishers (1988).

[4] Faigle, U.: Cores of games with restricted cooperation, *Zeitschrift für Operations Research* 33 (1989) 405-422.

[5] Fujishige, S.: *Submodular Functions and Optimization*, North-Holland (1991).

[6] Izawa, Y. and W. Takahashi: The coalitional rationality of the Shapley value, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220 (1998) 597-602.

[7] 松井，黒木，森谷，巽，谷野：提携に制限のある協力ゲームにおける凸性の継承，数理解析研究所講究録 1365 (2004) 14-24.